

## Kuliah Tamu

No  
Date

## ► Persamaan Diferensial Biasa

Anggap  $u(x)$  fungsi dengan satu variabel,  $x$ . Persamaan diferensial biasa ialah sebuah persamaan yang melibatkan  $u$  dan turunannya.

Contoh :  $u'' + 2u' - 3u = 0$

Anggap  $u(x) = e^{\lambda x}$

$u'(x) = \lambda e^{\lambda x}$

$u''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

⇒ Substitusikan ke persamaan :

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} - 3e^{\lambda x} = 0$$

$$(\lambda^2 + 2\lambda - 3)e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0 \rightarrow \lambda = -3 \vee \lambda = 1$$

$$u = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Persamaan diferensial parsial menyelesaikan fungsi dengan dua atau lebih variabel.

Contoh : misalkan  $u = u(x, t)$

$$u_t + 2u_x = 5$$

atau jika  $u = u(x, y)$  atau  $u = u(t, x)$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \rightarrow \text{Persamaan Harmonik}$$

$$u_t = u_{xx} \rightarrow \text{Persamaan panas}$$

$$u_{tt} = u_{xx} \rightarrow \text{Persamaan gelombang}$$

## ► Persamaan Transportasi

Pandang air mengalir pada laju konstan sepanjang pipa horizontal pada sumbu- $x$  positif. Dalam air tersebut terdapat polutan yang tersuspensi dalam air. Misal  $U(x, t)$  konsentrasi dengan posisi di  $x$  dalam waktu  $t$ . Maka rerata perubahan  $U_t$  adalah

$$U_t = c U_x$$

Apabila kita mengamati air mengalir pada laju konstant atau tidak pada arah yang konstan, maka kita punya :

$$U_t = c(t, x, y) U_x + d(t, x, y) U_y$$

Dan apabila terdapat Gaya dari luar (contohnya : angin), maka

$$U_t - c(t, x, y) U_x - d(t, x, y) U_y = f(t, x, y)$$

### ► Persamaan Harmonik

Pertimbangan suhu seragam suatu batang logam direpresentasikan oleh garis  $[0, L]$ .

Kita jaga suhunya pada  $x=0$  adalah  $T_1$  dan suhu pada  $x=L$  adalah  $T_2$ .

Perkirakan sebuah keadaan setimbang tercapai (Suhu tak berubah terhadap waktu).

Anggap  $U(x)$  merepresentasikan suhu pada titik  $x$ . Diberikan interval  $[a, b] \subset (0, L)$ .

Jumlah panas akan sama dengan kadar panas yang keluar dengan interval  $[a, b]$

$U_x(a) = U_x(b)$ . Menggunakan integral :

$$\int_a^b U_{xx} dx = U_x(x) \Big|_a^b = U_x(b) - U_x(a) = 0$$

Untuk semua sub interval  $[a, b] \subset (0, L)$  diperoleh :

$$U_{xx} = 0 \quad \text{di } (0, L).$$

### ► Persamaan Panas

Batang satu dimensi sama dengan persamaan harmonik, akan tetapi dalam hal ini membahas mengenai perubahan suhu terhadap waktu.



Misal Suhu  $h(x) \in [0, 1]$  dan  $H(0) = T_1$  dan  $H(L) = T_2$ , maka

$$\frac{d}{dt} \int_a^b U(x, t) dx = c(U_x(b, t) - U_x(a, t)) = c \int_a^b U_{xx}(x, t) dx = 0$$

Hal tersebut menandakan / menyatakan bahwa  $\int_a^b (U_t(x, t) - c U_{xx}(x, t)) dx = 0$

Karena hal tersebut benar untuk  $[a, b]$ , maka  $U_t = c U_{xx}$

Dengan kondisi batas :

$$U(0, t) = T_1, \quad U(L, t) = T_2$$

Inisial Kondisi

$$U(x, 0) = h(x) \quad \text{di } [0, 1]$$

Pada kondisi lainnya kita dapat mengasumsikan bahwa kedua ujung batang logam terisolasi

Kita punya :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = 0 = \frac{\partial U}{\partial x}(L, t) \Rightarrow \text{Kondisi Batas Neumann}$$

Jika kita mengasumsikan hanya satu batang

$$\frac{du}{dx}(0, t) = 0 \quad U(L, T) = T_2 \Rightarrow \text{Kondisi Batas Campuran}$$

## ► Persamaan Gelombang

Persamaan gelombang satu dimensi memodelkan dinamika dua dimensi dari string yang bergetar dimana regangan dan jepitan ada pada titik akhirnya (katakan  $x=0$  dan  $x=L$ )

$$U_t = c^2 U_{xx} \quad \text{di } [0, L] \times [0, \infty)$$

Dirichlet Boundary Conditions

$$U(0, t) = U(L, t) = 0 \quad \text{untuk setiap } t \geq 0$$

Initial condition

$$U(x, 0) = h(x)$$

$$U_t(x, 0) = \frac{du}{dt}(x, 0) = g(x) \quad \text{untuk tiap } x \in [0, L]$$

Karena  $U$  merupakan fungsi  $U(t)$

$U(t)$  = tinggi gelombang saat  $t$

$U_t(0)$  = Kecepatan

## ⇒ METODE KARAKTERISTIK

### 1). Persamaan Transportasi

Pertimbangkan  $U_t + aU_x = 0$ ,  $a \neq 0$

$$U(x, 0) = h(x)$$

Anggap bahwa  $U(x, t)$  merupakan solusi PD

$$\frac{du}{ds}(x(s), t(s)) = U_x x'(s) + U_t t'(s)$$

dimana mirip dengan persamaan transportasi, jadi :

$$U_x x'(s) + U_t t'(s) = 0$$

Anggap Misal  $t'(s) = 1$

$$x'(s) = a$$

$$t(0) = x_0$$

$$x(0) = 0$$

Maka terlihat  $x(s) = as + x_0$  dan  $t(s) = s$

$$U(0) = h(0)$$

$$x(s) = as + C_2$$

$$t(s) = s + C_1$$

$$x(0) = x_0$$

$$t(0) = 0$$

$$C_2 = x_0$$

$$C_1 = 0$$

$$U(s) = s + C_3$$

$$U(0) = h(x_0)$$

$$C_3 = h(x_0)$$

$$U(x, ) = h(x - a)$$

$$x = at + x_0$$

$$x_0 = x - at$$

$$U(x, t) = h(x - at)$$

Jadi, Penyelesaian  $U = h(x - at)$